Signal orderings based on dispersion and the supply of private information in auctions

Juan-José Ganuza ∼ José S. Penalva

The Economic Club

Introducción

- Problema orientado en criterios de información con foco en la distribución de los compradores.
- Creación de una nueva familia de criterios de precisión para medir el impacto de la información sobre distribuciones de expectativas condicionales.
- Para la medición de la dispersión se usa el orden dispersivo y convexo, con los cuales se define la precisión supermodular e integral respectivamente.
- Primer resultado: Mayor precisión aumenta la eficiencia de la asignación.
- Segundo resultado: Los incentivos sociales y privados no están alineados.

Ranking de señales acorde a la variabilidad de esperanzas condicionales

- V variable aleatoria (estado del mundo), X_k una señal del individuo k.
- Una señal es $\{F_k(x|v)\}_{v\in\mathbb{R}}$
- *Prior* $H(v)$, induce una distribución conjunta (V, X_k) llamada *information structure*.
- $\mathrm{E}[V] = \mu < \infty$ y que $F_k(x|v)$ admite inversa en x.
- Se definen la marginal $F_k(x)$ y la condicional $F_k(v|x)$

Ranking de señales acorde a la variabilidad de esperanzas condicionales

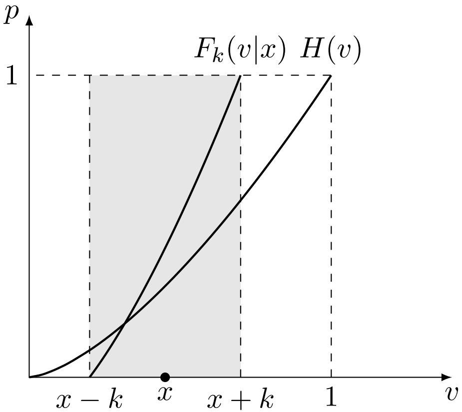
Ejemplo

- Sea $H(v) = v^p$ con $v \in [0,1]$ y $F_k(x|v) = \frac{x-(v-k)}{2k}$ con $x \in [v-k, v+k]$. Entonces:

$$F_k(v|x) = \frac{v^p - \max\{0, x-k\}^p}{\min\{1, x+k\}^p - \max\{0, x-k\}^p}, \quad v \in [x-k, x+k] \cap [0,1]$$

Ranking de señales acorde a la variabilidad de esperanzas condicionales

Ejemplo



Ranking de señales acorde a la variabilidad de esperanzas condicionales

Ejemplo

- Ranking de variabilidad en la esperanza condicionada:

$$\mathrm{E}[V|X_k = x] = \frac{p\left(\min\{1, x+k\}^{p+1} - \max\{0, x-k\}^{p+1}\right)}{(p+1)\left(\min\{1, x+k\}^{p} - \max\{0, x-k\}^{p}\right)}$$

  - $\lim_{k \to 0} \mathrm{E}[V|X_k = x] = x$ asumiendo $x \in (0, 1)$.
  - Si $k > \max\{x, 1-x\}$ entonces $\mathrm{E}[V|X_k = x] = \frac{p}{1+p}$

Criterios de precisión

Definición 1: Órdenes de Variabilidad Univariable

Sean Y y Z dos variables aleatorias reales con distribuciones F y G respectivamente.

- **Dispersive Order:** Y es mayor que Z en el *orden dispersivo* ($Y \geq_{\text{disp}} Z$) si para todo $q, p \in (0,1),\ q > p$:

$$F^{-1}(q) - F^{-1}(p) \geq G^{-1}(q) - G^{-1}(p)$$

- **Convex Order:** Y es mayor que Z en el *orden convexo* ($Y \geq_{\text{cx}} Z$) si para toda función real convexa φ:

$$\mathrm{E}[\varphi(Y)] \geq \mathrm{E}[\varphi(Z)]$$

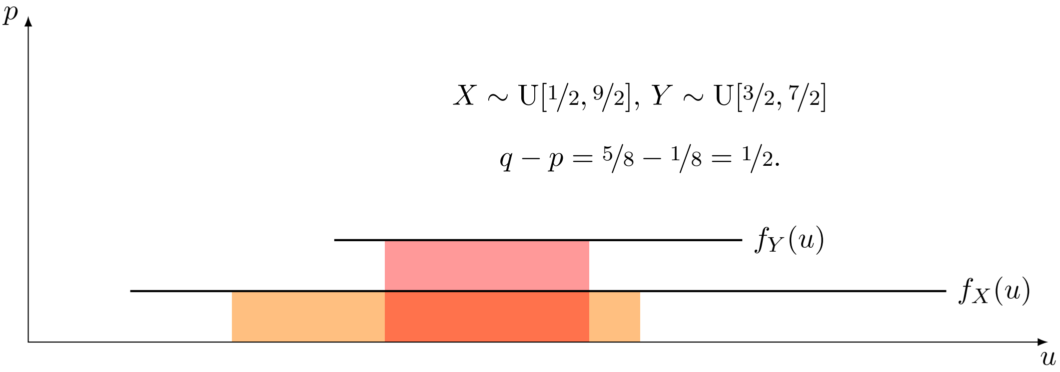
- Si $Y \geq_{\text{cx}} Z \implies \mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[Z]$
- Si $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[Z]$ entonces: $Y \geq_{\text{disp}} Z \implies Y \geq_{\text{cx}} Z$ *(Shaked and Shantikumar, 2007)*

Criterios de precisión

Ejemplo: Orden Dispersivo

$$X \sim \mathrm{U}[1/2, 9/2],\ Y \sim \mathrm{U}[3/2, 7/2]$$

$$q - p = 5/8 - 1/8 = 1/2.$$



Criterios de precisión

Definición 2: Criterios de precisión

- X_1 es más *supermodular precise* que X_2 si:

$$\mathrm{E}[V|X_1] \geq_{\text{disp}} \mathrm{E}[V|X_2]$$

- X_1 es más *integral precise* que X_2 si:

$$\mathrm{E}[V|X_1] \geq_{\text{cx}} \mathrm{E}[V|X_2]$$

Proposición 1

- Dada una prior $H(v)$ y dos señales X_1 y X_2, si X_1 es más supermodular preciso que X_2 entonces X_1 es más integral preciso que X_2.

Una alternativa para caracterizar la precisión

- $\Pi_k = F_k(X_k)$. $\Pi_k \sim U[0,1]$ si F_k es estrictamente creciente.
- Sea $W_k(\pi) = \mathrm{E}[V|\Pi_k = \pi] = \mathrm{E}[V|F_k^{-1}(\pi)]$.

Lema 1

Dada una prior $H(v)$ y dos señales X_1 y X_2, entonces:

- X_1 es más supermodular preciso que X_2 si y solo si $\forall \pi, \pi' \in (0,1)$, $\pi > \pi'$:

$$W_1(\pi) - W_2(\pi) \geq W_1(\pi') - W_2(\pi')$$

- X_1 es más integral preciso que X_2 si y solo si $\forall \pi \in (0,1)$:

$$\int_0^{\pi} (W_1(\rho) - W_2(\rho))\, \mathrm{d}\rho \leq 0$$

Comparativa de precisión con otros órdenes de información

Literatura aledaña:

- *Sufficiency* (Blackwell, 1951)
- *Effectiveness* (Lehmann (1988) and Persico (2000))
- *Monotone Information Order for Nondecreasing objective functions* (MIO-ND, Athey and Levin (2001))

Teorema 1

- Dado $H(v)$, si X_1 es mayor que X_2 en el orden MIO-ND, entonces X_1 es más integral preciso que X_2.
- Existe una prior $H(v)$ y dos señales monótonas X_1 y X_2 tales que X_1 es suficiente para X_2, pero X_1 y X_2 no están ordenadas en términos de la precisión supermodular.

Precisión y Oferta de Información Privada en Subastas

El Setup

- Subasta a segundo precio de sobre cerrado sin precio de reserva.
- Hay n postores neutros al riesgo con valoraciones privadas e inciertas
- Valoración ex-post V^i sobre $[0,1]$, con $V^i \sim H$, $E[V^i] = \mu$ y $u^i(v^i, t^i) = v^i - t^i$
- El subastador puede ofrecer información a costo $\delta \in [0, \infty)$ con señales privadas $(\Pi^i_\delta)^n_{i=1}$.
- δ es de conocimiento común, $\Pi^i_\delta \sim \mathrm{U}[0,1]$ y $W_\delta(\pi^i) = \mathrm{E}[V^i | \Pi^i_\delta = \pi^i]$.
- Las señales están ordenadas por δ en términos de la precisión supermodular (supuesto).

- La ganancia del subastador depende del monto pagado por el ganador, por tanto, nos enfocaremos en la ganancia de este mejor postor.
- Se define $\pi_{1:n}$ la señal mayor, $V_1(n,\delta) = \mathrm{E}[W_\delta(\Pi_{1:n})]$ y $U_{1:n}(p) = p^n$.

$$V_1(n,\delta) = \int_0^1 W_\delta(\pi)\mathrm{d}U_{1:n}(\pi) = \int_0^1 W_\delta(\pi) n\pi^{n-1}\mathrm{d}\pi$$

Teorema 2

Para señales ordenadas en términos de la precisión integral, la valoración esperada del mejor postor es no decreciente en la precisión de la señal, δ.

- Sea $\psi(\pi) = W_\delta(\pi) - W_{\delta'}(\pi)$, entonces:

$$V_1(n,\delta) \geq V_1(n,\delta') \iff \int_0^1 \psi(\pi) \mathrm{d}U_{1:n}(\pi) \geq 0$$

- El nivel eficiente δ^E está en:

$$\delta_n^E = \arg\max_{\delta \in [0,\infty)} \{V_1(n,\delta) - \delta\}$$

Teorema 3

Para señales ordenadas en términos de la precisión supermodular, el excedente social es supermodular en la precisión de la señal, δ, y el número de postores, n.

- Matemáticamente: $\mathrm{E}[\psi(\Pi_{1:n+1})] \geq \mathrm{E}[\psi(\Pi_{1:n})]$
- *Veinott's strong set order:* $\delta^E_{n+1} \geq \delta^E_n$ si $\forall \delta \in \delta^E_{n+1}, \delta' \in \delta^E_n$:

$$\max\{\delta, \delta'\} \in \delta^E_{n+1} \ \wedge \ \min\{\delta, \delta'\} \in \delta^E_n$$

- Sea $\pi_{2:n}$ la segunda señal más alta. Entonces:

$$V_2(n,\delta) = \int_0^1 W_\delta(\pi)\mathrm{d}U_{2:n}(\pi) = \int_0^1 W_\delta(\pi)n(n-1)\pi^{n-2}(1-\pi)\mathrm{d}\pi$$

Teorema 4

Para señales ordenadas en términos de la precisión integral:

- Si $n = 2$, el precio esperado es no creciente en la señal.
- Para todo $\delta > \delta'$ existe un n' tal que, para $n > n'$ una señal más precisa induce un precio esperado mayor.

- Hay efectos contrapuestos al subir la señal.

Proposición 2

Para señales ordenadas en términos de la precisión supermodular, el valor esperado de las rentas informacionales del mejor postor son no decrecientes en la precisión de la señal. Esto es, para $\delta > \delta'$:

$$R_w(n,\delta) \equiv V_1(n,\delta) - V_2(n,\delta) \geq V_1(n,\delta') - V_2(n,\delta') \equiv R_w(n,\delta')$$

- Problema del subastador:

$$\delta_n^A = \arg\max_{\delta \in [0,\infty)} \{V_2(n,\delta) - \delta\}$$

Teorema 5

Para señales ordenadas en términos de la precisión supermodular, el valor esperado de las ganancias del subastador son supermodulares en la precisión de la señal, δ, y el número de postores, n.

- Matemáticamente: $\mathrm{E}[\psi(\Pi_{2:n+1})] \geq \mathrm{E}[\psi(\Pi_{2:n})]$

- Una expresión para las rentas informacionales:

$$R_w(n,\delta) = \int_0^1 W_\delta(\pi)\mathrm{d}(U_{1:n}(\pi) - U_{2:n}(\pi)) = n\int_0^1 W_\delta(\pi)\mathrm{d}(\pi^n - \pi^{n-1})$$

Teorema 6

Para señales ordenadas en términos de la precisión supermodular, el nivel óptimo de precisión es menor al eficiente. La diferencia desaparece en la medida que el número de postores tiende a infinito.